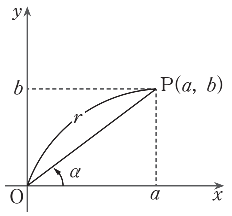
PART4 三角関数の合成

要点 ① 三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta$ の形の式を，加法定理を用いて変形することで，1 つの三角関数で表す。

$a\sin\theta+b\cos\theta$ に対し，座標平面上に点 P$(a,\ b)$ をとる。



線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α，線分 OP の長さを r とすると

$a=$ 　　　，$b=$

よって　$a\sin\theta+b\cos\theta=$ 　　　$\sin\theta+$ 　　　$\cos\theta$

$=r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$

ここで，正弦の加法定理 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ より

$\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha=$

また　$r=$

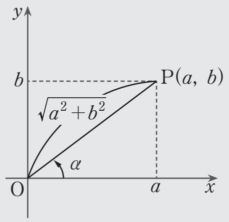
したがって　$a\sin\theta+b\cos\theta=$ 　　　　　　　　と変形することができる。

このような変形を，「三角関数の　　」という。

三角関数の合成

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし　$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$



$a\sin\theta+b\cos\theta$ の式から，座標平面上に点 P$(a,\ b)$ をとることで

・三平方の定理より r を

・OP と x 軸の正の向きのなす角を考えることにより α を

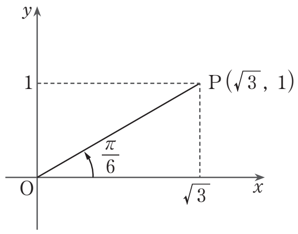
それぞれ求めることができ，その r，α を用いて，$r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形することができる。

例　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ を合成する。

点 P(　，　) をとると，OP $=$ 　　　　　$=\sqrt{4}=2$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると $\alpha=$

よって $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=$



4 (1) 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(i) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$　　(ii) $\sin\theta-\cos\theta$

(2) 関数 $y=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$ の最大値，最小値を求めよ。

Point Pickup

三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta$ の形の式に対し，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ をとり

- $r=\sqrt{a^2+b^2}$
- $\cos\alpha=\dfrac{a}{r}$，$\sin\alpha=\dfrac{b}{r}$ となる α

を用いて $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形する。

特に断りがなければ，α は $-\pi<\alpha<\pi$ の範囲でとるとよい。

第11講 PART4 確認問題

1 $3\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

$$3\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{\boxed{ウ}}\right)$$

2 $-\sin\theta+\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

$$-\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\boxed{エ}}\sin\left(\theta+\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\pi\right)$$

3 関数 $y=2\sin\theta+\cos\theta$ の最大値，最小値を求めよ。

最大値 $\sqrt{\boxed{キ}}$，最小値 $-\sqrt{\boxed{ク}}$

[MEMO]

PART4 三角関数の合成

4 (1) 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(i) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$　　(ii) $\sin\theta-\cos\theta$

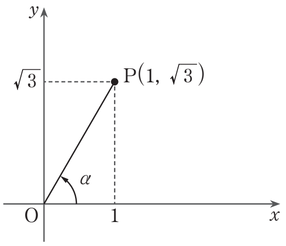
(2) 関数 $y=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$ の最大値，最小値を求めよ。

[解答]

(1)(i) 点 $\mathrm{P}(1,\ \sqrt{3})$ をとると　$\mathrm{OP}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$

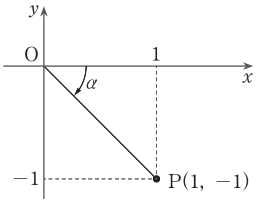
よって　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$



(ii) 点 $\mathrm{P}(1,\ -1)$ をとると　$\mathrm{OP}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$

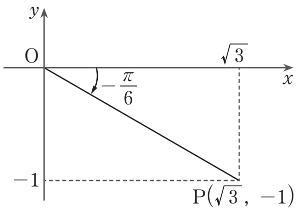
よって　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$



(2) $y=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$-1\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq 1$ より　$-2\leqq 2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq 2$

よって　y の最大値は 2，最小値は -2



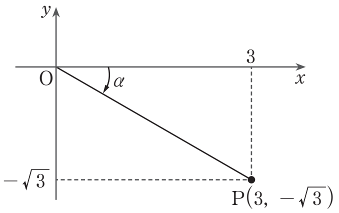
第 11 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：3，ウ：6

[解説]

$3\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$ に対し，座標平面上に点 P$(3,\ -\sqrt{3})$ をとると



$$\mathrm{OP}=\sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると

$$\alpha=-\frac{\pi}{6}$$

よって

$$3\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=\mathbf{2\sqrt{3}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$$ [A]

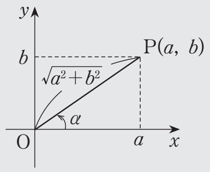
[A]　三角関数の合成

$$a\sin\theta+b\cos\theta$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

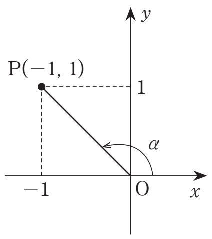


2

[正解] エ：2，オ：3，カ：4

[解説]

$-\sin\theta+\cos\theta$ に対し，座標平面上に点 P$(-1,\ 1)$ をとると



$$\mathrm{OP}=\sqrt{(-1)^2+1^2}$$
$$=\sqrt{2}$$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると

$$\alpha=\frac{3}{4}\pi$$

よって

$$-\sin\theta+\cos\theta=\mathbf{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)}$$ [B]

[B]　三角関数の合成

$$a\sin\theta+b\cos\theta$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

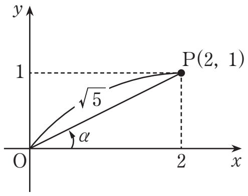
$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

3 [正解] キ：5，ク：5

[解説]

$$y = 2\sin\theta + \cos\theta$$
$$= \sqrt{5}\sin(\theta + \alpha)$$

[C]



ただし　$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$-1 \leqq \sin(\theta + \alpha) \leqq 1$ より

$$-\sqrt{5} \leqq \sqrt{5}\sin(\theta + \alpha) \leqq \sqrt{5}$$

よって

y の最大値は $\sqrt{5}$，最小値は $-\sqrt{5}$

[C]　三角関数の合成

$a\sin\theta + b\cos\theta$

$= \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \alpha)$

ただし

$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$